# Statistica I

## Esercitazione 2: indici di posizione

**Tommaso Rigon**

**Università Milano-Bicocca**

# Descrizione del problema (continuazione)

- Si faccia riferimento ai dati dell'Esercitazione 1 riguardanti gli **abeti rossi**. Vengono misurati **ulteriori** $n = 30$ **diametri**.

## Campione addizionale di abeti rossi (diametro), $n = 30$

```
 [1] 20 20 22 23 28 29 29 31 33 34 34 37 38 38 39 40 42 42 44 44 45 49 54
[24] 54 54 55 58 59 60 68
```

## Domande

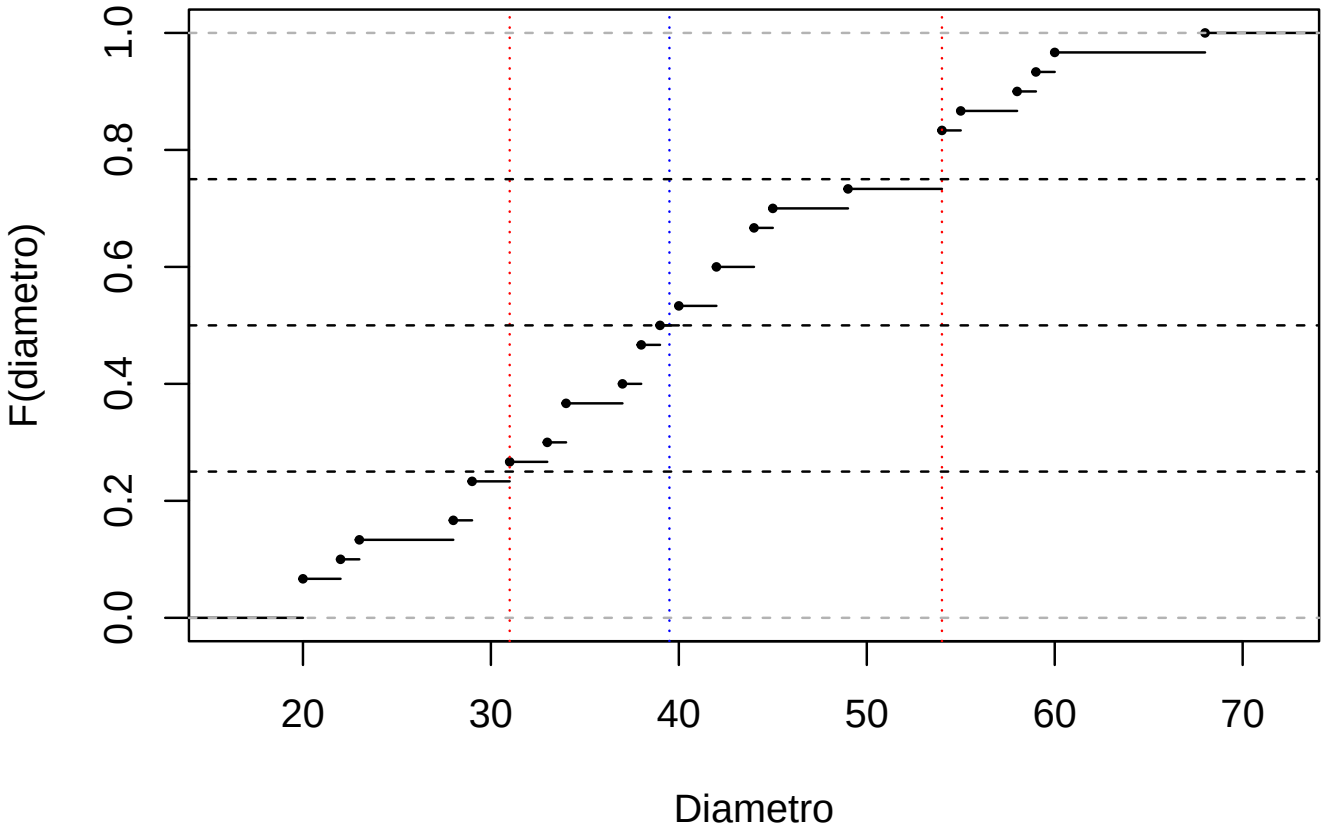
- Si costruisca tale **tabella** indicando frequenze assolute, cumulate assolute e cumulate relative per ciascun diametro.
- Si calcolino la **media aritmetica** e la **mediana**.
- Si calcoli il **primo quartile** ($\mathcal{Q}_{0.25}$), il **terzo quartile** ($\mathcal{Q}_{0.75}$) ed il **quarto decile** ($\mathcal{Q}_{0.4}$), seguendo la definizione data nell'unità C.
- Si rappresentino primo, secondo (mediana) e terzo quartile nel grafico della **funzione di ripartizione**.

# Tabella di frequenze

| $D$ (diametro) | $n_j$ | $N_j$ | $f_j$ | $F_j$ |
|---|---|---|---|---|
| 20 | 2 | 2 | 0.067 | 0.067 |
| 22 | 1 | 3 | 0.033 | 0.100 |
| 23 | 1 | 4 | 0.033 | 0.133 |
| 28 | 1 | 5 | 0.033 | 0.167 |
| 29 | 2 | 7 | 0.067 | 0.233 |
| 31 | 1 | 8 | 0.033 | 0.267 |
| 33 | 1 | 9 | 0.033 | 0.300 |
| 34 | 2 | 11 | 0.067 | 0.367 |
| 37 | 1 | 12 | 0.033 | 0.400 |
| 38 | 2 | 14 | 0.067 | 0.467 |
| 39 | 1 | 15 | 0.033 | 0.500 |
| 40 | 1 | 16 | 0.033 | 0.533 |
| 42 | 2 | 18 | 0.067 | 0.600 |
| 44 | 2 | 20 | 0.067 | 0.667 |
| 45 | 1 | 21 | 0.033 | 0.700 |
| 49 | 1 | 22 | 0.033 | 0.733 |
| 54 | 3 | 25 | 0.100 | 0.833 |
| 55 | 1 | 26 | 0.033 | 0.867 |
| 58 | 1 | 27 | 0.033 | 0.900 |
| 59 | 1 | 28 | 0.033 | 0.933 |
| 60 | 1 | 29 | 0.033 | 0.967 |
| 68 | 1 | 30 | 0.033 | 1 |

# Quantili e funzione di ripartizione

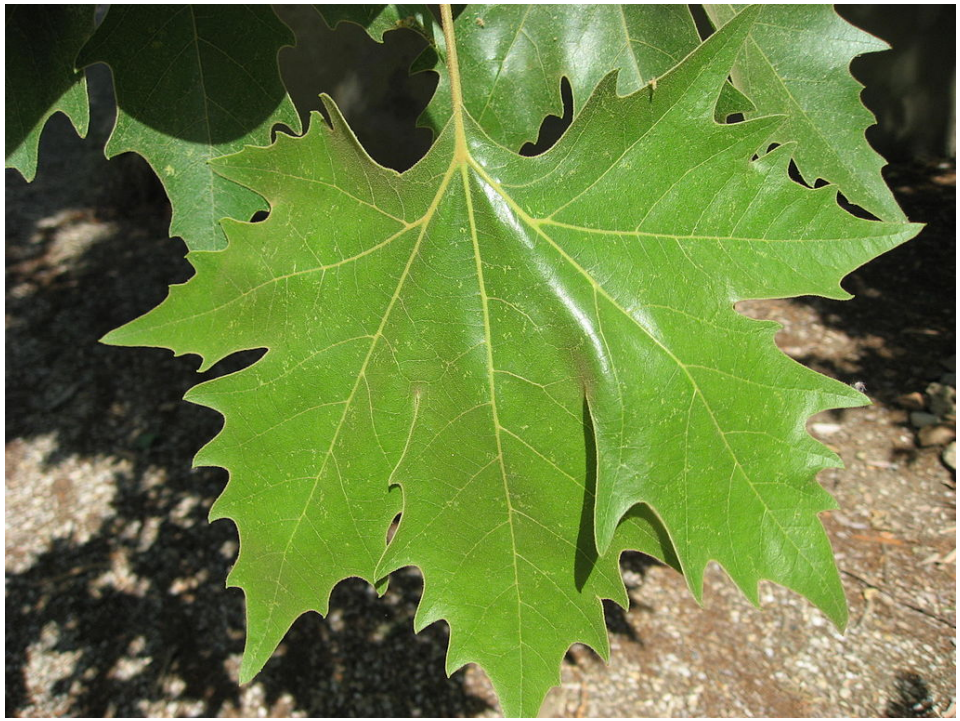
- La **media** è circa 40.77, la **mediana** è 39.5. Il **primo quartile** è pari a 31, il **terzo quartile** è pari a 54 mentre il **quarto decile** è pari a 37.



# Commenti ai risultati

- Questo nuovo insieme di dati è del tutto **compatibile** con i dati degli abeti rossi analizzati nell'Esercitazione 1; qui la numerosità campionaria è $n = 30$.
- Da un punto di vista "tecnico", l'esercizio serve a insegnare come calcolare media, mediana e quantili in presenza di **osservazioni ripetute**.
- Da un punto di vista dell'analisi, i dati confermano quanto già visto nell'Esercitazione 1: il **centro della distribuzione** è circa 40cm; media e mediana sono quasi coincidenti.
- Inoltre, come in parte già notato in precedenza, circa la **metà dei dati** ha diametro compreso tra 31 e 54 cm.

# Descrizione del problema



- Siamo interessati a quantificare la **lunghezza** di $n = 100$ foglie di platano, dopo 10 giorni di siccità.

- È noto che, dopo un giorno di pioggia, la **lunghezza** delle foglie **aumenta** di una quota percentuale del 10% più una quota fissa pari a 0.5 mm.

# Dati raggruppati e domande

- È riportata di seguito una tabella che riassume le **lunghezze** in mm. Si noti che le classi **non** sono **equispaziate**.

| Classe | Frequenza assoluta $n_j$ | Frequenza cumulata $N_j$ |
|---|---|---|
| $(120, 135]$ | 10 | 10 |
| $(135, 145]$ | 20 | 30 |
| $(145, 150]$ | 60 | 90 |
| $(150, 165]$ | 10 | 100 |

## Domande

- Si calcoli un'approssimazione della **media** e della **mediana**.
- Si calcoli un'approssimazione della media e della mediana **dopo un giorno di pioggia** continuata.

# Schema della soluzione I

- I dati sono **raggruppati** per cui non è possibile calcolare la media e la mediana dei dati originari. È però possibile ottenere un'approssimazione.
- La **mediana** è il valore medio delle unità statistiche in posizione 50 e 51. Entrambe queste unità appartengono alla classe $(145, 150]$ e perciò anche la mediana.
- Una possibile **approssimazione** per la mediana si ottiene tramite la formula:

$$\text{Me}_x \approx 145 + (150 - 145)\frac{0.5 - 0.3}{0.9 - 0.3} = 145 + (150 - 145)\frac{50 - 30}{90 - 30} = 146.7.$$

- Siano $m_1, \ldots, m_4$ i valori centrali degli intervalli. Allora, un valore approssimato per la **media** è

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} m_j n_j = \frac{1}{100}(127.5 \times 10 + \cdots + 157.5 \times 10) = 145.$$

# Schema della soluzione II

- Il secondo quesito si risolve rapidamente poichè è equivalente al calcolo della media e della mediana dei **dati trasformati**

$$y_i = 0.5 + (1 + 0.1)x_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

- I dati $y_1, \ldots, y_n$ rappresentano le lunghezze i mm dopo un giorno di pioggia continuata.

- Trattandosi di una trasformazione **lineare** monotona crescente, sfruttando le proprietà della mediana si ottiene che

$$\text{Me}_y = 0.5 + (1 + 0.1)\text{Me}_x \approx 161.87,$$

mentre per la media vale che

$$\bar{y} = 0.5 + (1 + 0.1)\bar{x} \approx 160.$$

# Descrizione del problema

- In una strada rettilinea sono collocati 5 condomini, chiamati $A, B, C, D$ ed $E$. Il comune desidera determinare la **posizione ottimale** per un nuovo supermercato.

# Dati grezzi e domande

- I condomini sono occupati dal seguente **numero di inquilini**:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Numero di inquilini | 6 | 6 | 20 | 12 | 8 |

- Inoltre, la **posizione** dei condomini, ovvero i metri di **distanza** dall'inizio della via, sono:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Distanza dall'inizio della via (metri) | 1000 | 2000 | 3000 | 3100 | 3150 |

## Domande

- Si indichi la posizione ideale del supermercato, ovvero la **posizione che minimizza il disagio** degli inquilini in termini di **distanza percorsa**, in due casi:
  - Supponendo che disagio cresca **linearmente** con la distanza.
  - Supponendo che disagio cresca con il **quadrato** della distanza.

# Schema della soluzione I

- Siano $x_1, \ldots, x_{52}$ le **posizioni** dei vari inquilini nella strada rettilinea.
- Sebbene i coinquilini siano 52, le modalità sono solamente 5, dal momento che essi vivono in 5 condomini.
- Nella **tabella** seguente, riscriviamo il testo del problema con una notazione più familiare.

| Modalità $c_j$ | Frequenza assoluta $n_j$ | Frequenza cumulata $N_j$ |
|---|---|---|
| 1000 | 6 | 6 |
| 2000 | 6 | 12 |
| 3000 | 20 | 32 |
| 3100 | 12 | 44 |
| 3150 | 8 | 52 |

# Schema della soluzione II

- Il primo quesito chiede di individuare il valore $\alpha$, ovvero la posizione ottimale del supermercato, che minimizza la seguente quantità

$$\sum_{i=1}^{52} |x_i - \alpha| = \sum_{j=1}^{5} n_j |c_j - \alpha| = 6|1000 - \alpha| + \cdots + 8|3150 - \alpha|.$$

- Un possibile valore (ce ne potrebbero essere tanti!), che minimizza tale somma è la **mediana**.

- In questo caso, la numerosità campionaria è pari a $n = 52$ e pertanto la mediana è pari alla media dei due valori centrali, ovvero i valori degli individui in posizione 26 e 27.

- Poichè entrambi sono pari a 3000, la mediana è a sua volta pari a 3000.

- Inoltre, poichè $x_{(26)} = x_{(27)} = 3000$, il valore $\alpha = 3000$ è l'**unico** che minimizza la somma degli scarti in valore assoluto.

# Schema della soluzione III

- La seconda domanda chiede il valore $\alpha$ che minimizza il **quadrato delle distanza**, ovvero il valore che rende minima la somma

$$\sum_{i=1}^{52}(x_i-\alpha)^2=\sum_{j=1}^{5}n_j(c_j-\alpha)^2=6(1000-\alpha)^2+\cdots+8(3150-\alpha)^2.$$

- Come visto nell'unità C, tale valore è la **media aritmetica**.

- Si ottiene quindi che il valore cercato è semplicemente

$$\alpha=\bar{x}=\frac{1}{52}\sum_{i=1}^{52}x_i=\frac{1}{52}\sum_{j=1}^{5}n_jc_j=\frac{1}{52}(1000\times 6+\cdots+3150\times 8)=2700.$$