

Statistica I

Esercitazione 3: variabilità, istogrammi, boxplot, simmetria, curtosi

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca



La saggezza della folla è affidabile?

- Nel 1907 lo scienziato ed inventore **Francis Galton**, cugino di Charles Darwin, scrisse una lettera alla prestigiosa rivista scientifica **Nature**, intitolata “*Vox Populi*”.
- Francis Galton era stato ad una mostra di bestiame. Era stato indetto un **concorso** per indovinare il peso della carne, dopo la macellazione, di un **grande bue**.
- La partecipazione costava 6 penny e Galton riuscì a procurarsi ben $n = 787$ dei biglietti acquistati. Calcolò la **media** delle varie stime, ovvero 547 kg.
- Il valore medio era notevolmente vicino al **peso reale** di 543 kg, sebbene la maggior parte dei concorrenti avesse fornito una stima molto meno precisa.
- Questo metodo per prendere decisioni è spesso chiamato “**saggezza della folla**”.
- Siamo interessati a verificare **se** il fenomeno della saggezza della folla sia replicabile, tramite un esperimento.

VOX POPULI.

IN these democratic days, any investigation into the trustworthiness and peculiarities of popular judgments is of interest. The material about to be discussed refers to a small matter, but is much to the point.

A weight-judging competition was carried on at the annual show of the West of England Fat Stock and Poultry Exhibition recently held at Plymouth. A fat ox having been selected, competitors bought stamped and numbered cards, for 6d. each, on which to inscribe their respective names, addresses, and estimates of what the ox would weigh after it had been slaughtered and "dressed." Those who guessed most successfully received prizes. About 800 tickets were issued, which were kindly lent me for examination after they had fulfilled their immediate purpose. These afforded excellent material. The judgments were unbiased by passion and uninfluenced by oratory and the like. The sixpenny fee deterred practical joking, and the hope of a prize and the joy of competition prompted each competitor to do his best. The competitors included butchers and farmers, some of whom were highly expert in judging the weight of cattle; others were probably guided by such information as they might pick up, and by their own fancies. The average competitor was probably as well fitted for making a just estimate of the dressed weight of the ox, as an average voter is of judging the merits of most political issues on which he votes, and the variety among the voters to judge justly was probably much the same in either case.

After weeding thirteen cards out of the collection, as being defective or illegible, there remained 787 for discussion. I arrayed them in order of the magnitudes of the estimates, and converted the *cwt.*, *quarters*, and *lbs.* in which they were made, into *lbs.*, under which form they will be treated.

NO. 1949, VOL. 75]

URE

[MARCH 7, 1907]

Distribution of the estimates of the dressed weight of a particular living ox, made by 787 different persons.

Degrees of the length of Array 0°—100°	Estimates in lbs.	Centiles		Excess of Observed over Normal
		Observed deviates from 1207 lbs.	Normal p.e = 37	
5	1074	-133	-90	+43
10	1109	-98	-70	+28
15	1126	-81	-57	+24
20	1148	-59	-46	+13
q_1 25	1162	-45	-37	+8
30	1174	-33	-29	+4
35	1181	-26	-21	+5
40	1188	-19	-14	+5
45	1197	-10	-7	+3
<i>m</i> 50	1207	0	0	0
55	1214	+7	+7	-2
60	1219	+12	+14	-2
65	1225	+18	+21	-3
70	1230	+23	+29	-6
q_3 75	1236	+29	+37	-8
80	1243	+36	+46	-10
85	1254	+47	+57	-10
90	1267	+52	+70	-18
95	1293	+86	+90	-4

q_1 , q_3 , the first and third quartiles, stand at 25° and 75° respectively.
m, the median or middlemost value, stands at 50°.
 The dressed weight proved to be 1198 lbs.

La bottiglia con le biglie di vetro



- Ho riempito una bottiglia con delle **biglie** e ho chiesto alla classe quante fossero.

Informazioni aggiuntive

- Ho quindi posto nuovamente la domanda agli studenti, fornendo però le seguenti **informazioni aggiuntive**. Gli studenti potevano **rivedere** la loro stima.

Informazioni aggiuntive

- La formula per il calcolo del **volume di un cilindro** è:

$$(\text{Volume}) = (\text{Area di base}) \times (\text{Altezza}),$$

dove l'area di base, ovvero l'**area del cerchio**, è pari a:

$$(\text{Area di base}) = \pi(\text{Diametro}/2)^2.$$

- La bottiglia è stata agitata varie volte durante il riempimento, per ridurre il più possibile gli spazi vuoti tra le biglie.
- La bottiglia contiene approssimativamente **1 litro**. Le biglie di vetro sono tutte uguali tra di loro e hanno diametro di **16 mm**, ovvero **2.144 ml** ciascuna.
- È inoltre **noto** (<https://www.nature.com/articles/nature06981>) che l'impacchettamento casuale di sfere ha una **densità** compresa tra il 55% ed il 64%.

I dati grezzi

Primo tentativo ($n = 95$)

```
[1] 250 210 136 250 450 240 251 210 NA NA 187 96 135 350 210 400
[17] 260 450 219 175 330 287 291 115 270 275 293 177 204 264 220 142
[33] 305 300 201 426 317 168 145 112 250 370 255 NA 149 227 670 213
[49] 270 213 185 190 167 247 235 167 NA 362 291 NA 345 125 300 280
[65] 250 207 190 163 400 297 160 227 157 250 187 184 247 211 187 133
[81] NA 315 79 335 260 218 248 225 330 197 250 244 NA 189 295
```

Secondo tentativo ($n = 95$)

```
[1] 220 280 280 285 267 330 253 200 350 275 466 NA 380
[14] 260 NA 279 134 270 263 213 300 296 277 NA 180 275
[27] 270 279 249 293 330 148 370 300 210 466 269 256 200
[40] 279 298 220 280 351 NA 215 1096 127 280 153 465 280
[53] 235 247 262 289 276 322 280 268 280 220 250 280 280
[66] 226 230 298 275 278 190 250 202 275 423 NA 338 NA
[79] 256 38 390 293 265 300 281 263 NA 280 298 253 275
[92] 279 263 238 100
```

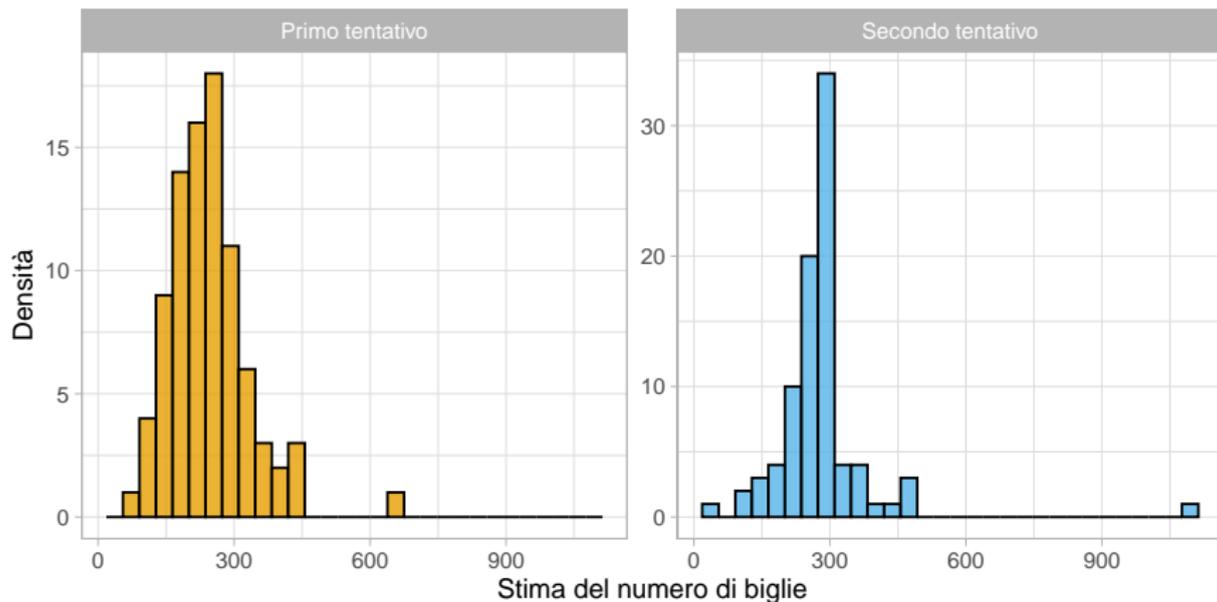
La pulizia del dataset

- I dati di questa unità presentano delle **complicazioni ulteriori**, tipiche dei **dati reali**.
- Il numero di studenti che si sono connessi per votare sono $n = 95$. Tuttavia, alcuni di loro hanno **votato solamente una volta**.
- L'assenza del voto è un **dato mancante** e si indica con la sigla NA, dall'inglese "*Not Available*". In questa sede, ci limiteremo ad escluderli dall'analisi.
- Un dato, nel secondo tentativo presentava, il valore 28, a fronte di un primo tentativo pari a 255. Presumendo un **errore di battitura**, è stato **modificato** in 280.

Domande

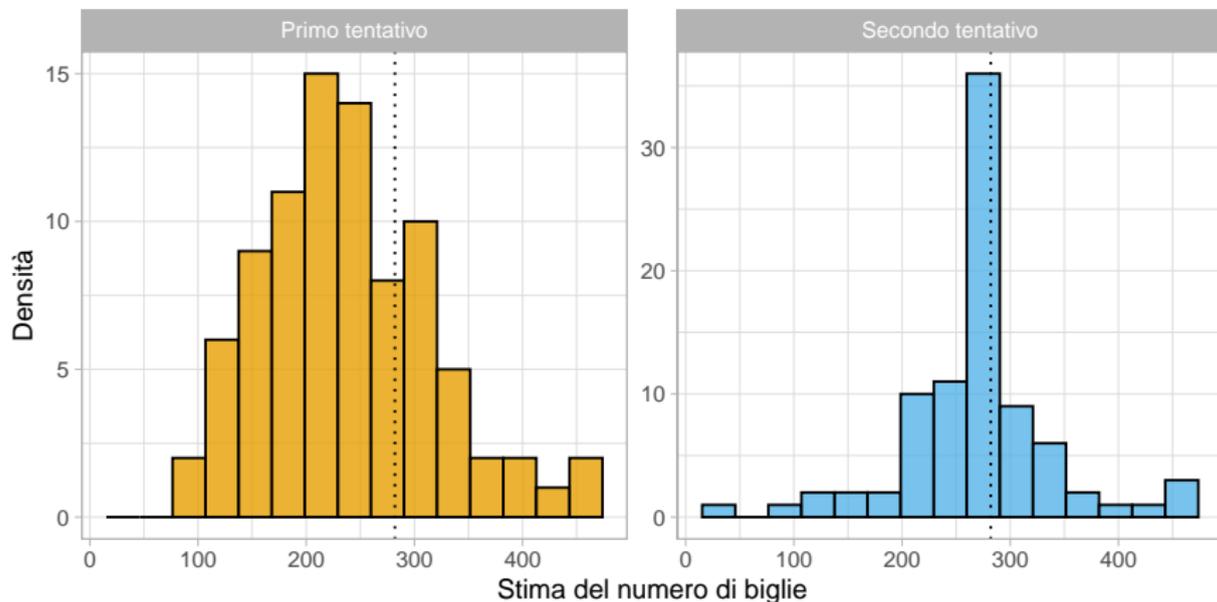
- Si descrivano le **principali caratteristiche** delle distribuzioni al primo ed al secondo tentativo.
- La **vox populi** si è rivelata affidabile?
- Ci sono **differenze** apprezzabili tra i due tentativi?

Istogrammi



- È presente un **valore anomalo**, ovvero la coppia di dati (670, 1096). Si è deciso, in maniera abbastanza arbitraria, di **escluderlo** da tutte le analisi successive.

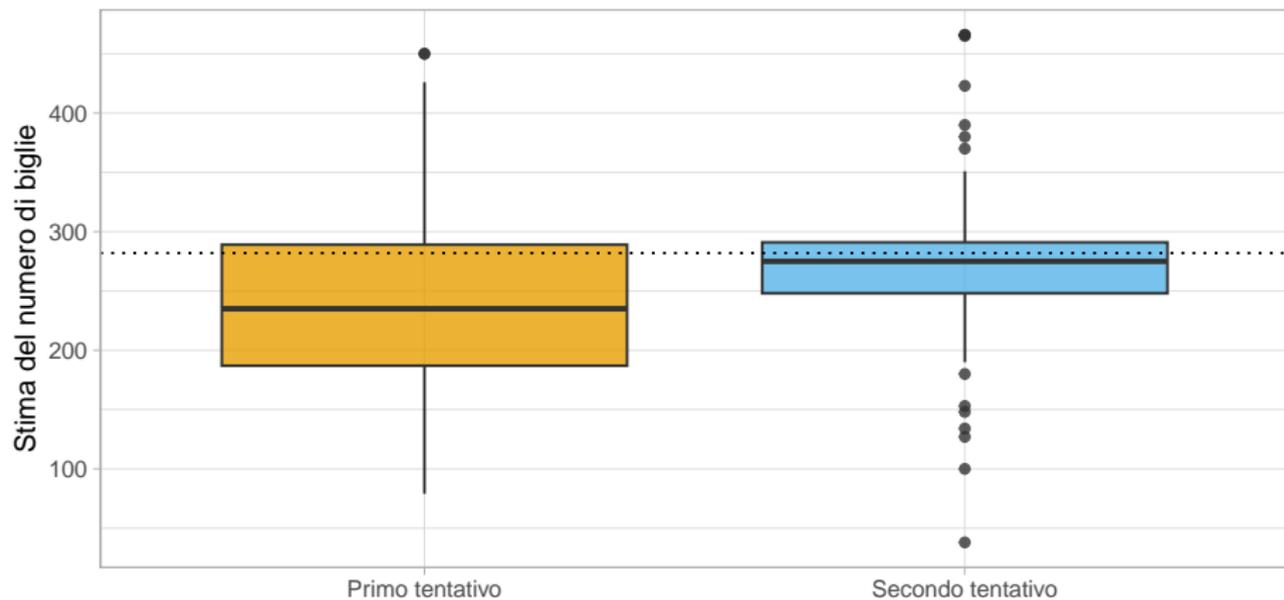
Istogrammi



La soluzione

- Il numero di biglie contenute nella bottiglia è **282**.

Boxplot



	Primo tentativo	Secondo tentativo
Minimo	79	38
Primo quartile	187	247
Media	239.05	269.74
Mediana	235	275
Terzo quartile	291	293
Massimo	450	466
Varianza	6101.72	4790.29
Scarto quadratico medio	78.11	69.21
Scarto interquartile	104	46
MAD	50	23
Asimmetria di Pearson γ	0.54	0.10
Asimmetria di Bowley	0.08	-0.22
Curtosi κ	3.19	5.35

Misurare gli errori

- Gli indici di variabilità misurano quanto i dati, le stime in questo caso, differiscono tra loro. In particolare, varianza e MAD misurano la distanza **dal proprio centro**.
- Purtroppo, il “centro” del primo tentativo è “**sbagliato**”, perchè sottostima il numero corretto di biglie, cioè 282. Diremo che è una stima **distorta**.
- Di conseguenza, non possiamo usare la varianza per misurare la precisione.
- Siano x_1, \dots, x_n le stime di un generico tentativo. Due indicatori appropriati sono invece:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - 282)^2, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - 282|,$$

che prendono il nome di **errore quadratico medio** ed **errore assoluto medio**.

	Primo tentativo	Secondo tentativo
Errore quadratico medio	7946.77	4940.70
Errore assoluto medio	74.06	45.90

Commento ai risultati

- Il numero di biglie presente nella bottiglia era 282. La folla è stata in grado di predirlo?
- La *vox populi* è stata **discretamente** affidabile nel primo tentativo **molto** affidabile nel secondo. Usando la mediana, la folla ha rispettivamente previsto **235** e **275** biglie.
- Inoltre, ci sono delle importanti **differenze** tra i due tentativi.
- Al primo tentativo, le stime sono in parte **distorte**, cioè si concentrano su un valore non corretto. Viceversa, dopo le informazioni aggiuntive, questa distorsione quasi scompare.
- Inoltre, la variabilità delle stime si **riduce** al secondo tentativo, come indicato ad esempio dall'**errore assoluto medio**. In media, ciascuno ha sbagliato di circa 46 biglie.
- Il secondo tentativo manifesta una distribuzione **leptocurtica** ($\kappa > 3$), che indica la presenza di stime poco precise nonostante metà dei dati sia compresa tra (247, 293).

Descrizione del problema



- Un'azienda produttrice di **lampadine** controlla la durata dei suoi prodotti facendo funzionare $n = 200$ lampadine ininterrottamente **fino a che si rompono**.
- A determinati istanti di tempo si effettua un controllo e si verifica quante in totale non sono più funzionanti.

Tempo	10	30	100	150	200	400
Rotture cumulate	2	20	40	80	120	170

- Si noti che 30 lampadine **non si sono mai rotte**.

Domande

- Si valuti la **edurata media** e si ottenga un **indice di posizione** appropriato per sintetizzare la distribuzione delle durate.
- Si calcoli un opportuno **indice di variabilità**.

Schema della soluzione

- In primo luogo, ri-organizziamo la **tabella** in maniera tale da evidenziare gli intervalli considerati.

Tempo	(0, 10]	(10, 30]	(30, 100]	(100, 150]	(150, 200]	(200, 400]	(400, ∞]
n_j	2	18	20	40	40	50	30
f_j	0.01	0.09	0.10	0.20	0.20	0.25	0.15
F_j	0.01	0.1	0.20	0.40	0.60	0.85	1

- Si noti che un totale di $200 - 170 = 30$ lampadine non si sono mai rotte entro il tempo 400.
- Questo pone delle **difficoltà** nel calcolo della **media**.
- Infatti, non è chiaro quale valore sia il valore centrale dell'intervallo $(400, \infty]$. Qualunque scelta dovrebbe ben essere giustificata.

Schema della soluzione

- La **mediana** non risente di questo problema.
- La mediana appartiene necessariamente all'intervallo $(150, 200]$. Utilizzando l'**approssimazione lineare**, otteniamo che

$$\text{Me} \approx 150 + (200 - 150) \frac{0.5 - 0.4}{0.6 - 0.4} = 175.$$

- Per le stesse ragioni menzionate prima, ci sono delle difficoltà nel calcolo della varianza. Consideriamo quindi lo scarto interquartile.
- Utilizzando l'**approssimazione lineare**, si ottiene

$$Q_{0.25} \approx 100 + (150 - 100) \frac{0.25 - 0.2}{0.4 - 0.2} = 112.5.$$

$$Q_{0.75} \approx 200 + (400 - 200) \frac{0.75 - 0.6}{0.85 - 0.6} = 320.$$

- Pertanto lo **scarto interquartile** è pari a

$$Q_{0.75} - Q_{0.25} = 207.5.$$