

Statistica I

Unità J: covarianza e correlazione

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca



Unità J

Argomenti affrontati

- Diagramma di dispersione
- Covarianza
- Coefficiente di correlazione (lineare)
- Matrice delle varianze e covarianze
- Matrice di correlazione

Riferimenti al libro di testo

- §7.1
- §7.6 — §7.7

Descrizione del problema

- Consideriamo **tre indicatori socio-economici** disponibili per $n = 47$ province svizzere di lingua francese. I dati sono storici e si riferiscono al 1888. Consideriamo:
 - Una **misura di fertilità** (nati per donna), standardizzata in maniera tale che vari tra 0 e 100.
 - Percentuale degli **occupati in agricoltura** sul totale degli occupati, interpretabile come un indicatore di urbanizzazione della provincia.
 - Il logaritmo della percentuale della popolazione con un'**istruzione** superiore alla scuola primaria.
- Il problema che ci poniamo è di cercare di descrivere le **relazioni** esistenti tra i tre indicatori.

I dati grezzi

Fertilità

| | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| [1] | 80.2 | 83.1 | 92.5 | 85.8 | 76.9 | 76.1 | 83.8 | 92.4 | 82.4 | 82.9 | 87.1 | 64.1 |
| [13] | 66.9 | 68.9 | 61.7 | 68.3 | 71.7 | 55.7 | 54.3 | 65.1 | 65.5 | 65.0 | 56.6 | 72.5 |
| [25] | 57.4 | 74.2 | 72.0 | 60.5 | 58.3 | 65.4 | 75.5 | 69.3 | 77.3 | 70.5 | 79.4 | 65.0 |
| [37] | 92.2 | 79.3 | 70.4 | 65.7 | 72.7 | 64.4 | 77.6 | 67.6 | 35.0 | 44.7 | 42.8 | |

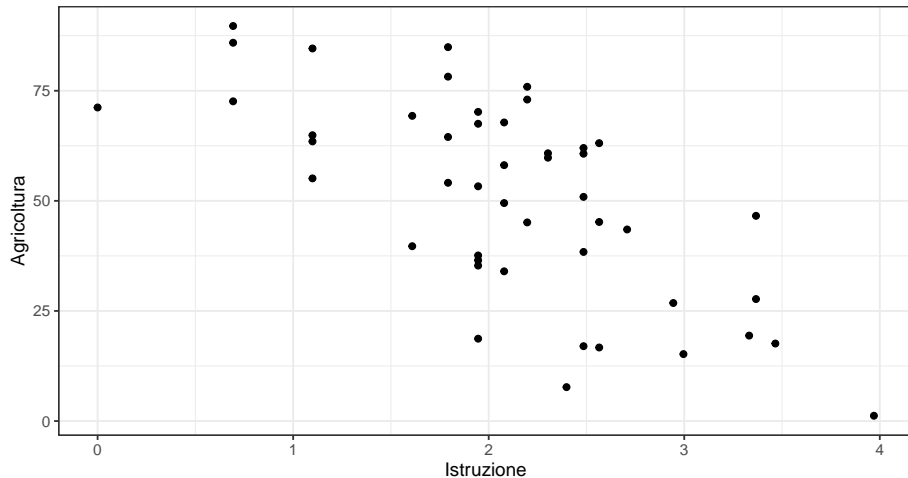
Agricoltura

| | | | | | | | | | | | | |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| [1] | 17.0 | 45.1 | 39.7 | 36.5 | 43.5 | 35.3 | 70.2 | 67.8 | 53.3 | 45.2 | 64.5 | 62.0 |
| [13] | 67.5 | 60.7 | 69.3 | 72.6 | 34.0 | 19.4 | 15.2 | 73.0 | 59.8 | 55.1 | 50.9 | 71.2 |
| [25] | 54.1 | 58.1 | 63.5 | 60.8 | 26.8 | 49.5 | 85.9 | 84.9 | 89.7 | 78.2 | 64.9 | 75.9 |
| [37] | 84.6 | 63.1 | 38.4 | 7.7 | 16.7 | 17.6 | 37.6 | 18.7 | 1.2 | 46.6 | 27.7 | |

Istruzione

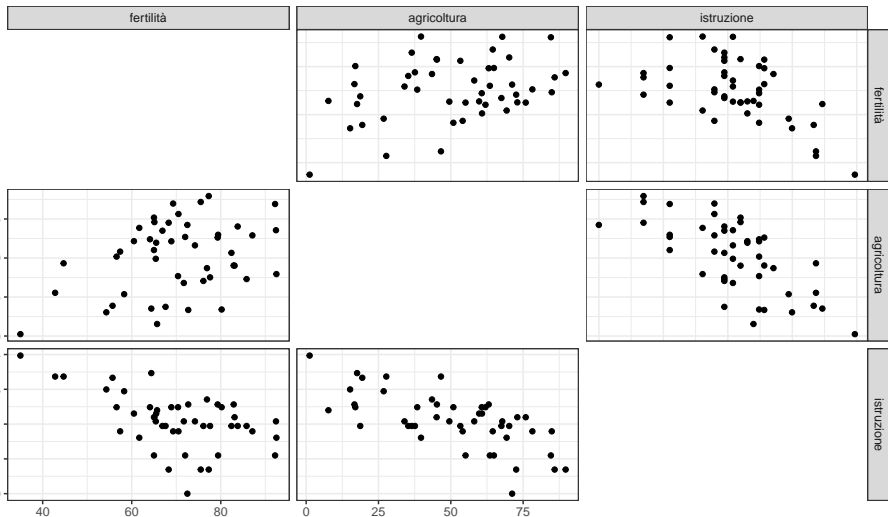
| | | | | | | | | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|--|
| [1] | 2.485 | 2.197 | 1.609 | 1.946 | 2.708 | 1.946 | 1.946 | 2.079 | 1.946 | 2.565 | | |
| [11] | 1.792 | 2.485 | 1.946 | 2.485 | 1.609 | 0.693 | 2.079 | 3.332 | 2.996 | 2.197 | | |
| [21] | 2.303 | 1.099 | 2.485 | 0.000 | 1.792 | 2.079 | 1.099 | 2.303 | 2.944 | 2.079 | | |
| [31] | 0.693 | 1.792 | 0.693 | 1.792 | 1.099 | 2.197 | 1.099 | 2.565 | 2.485 | 2.398 | | |
| [41] | 2.565 | 3.466 | 1.946 | 1.946 | 3.970 | 3.367 | 3.367 | | | | | |

Il diagramma a dispersione



- I dati sono rappresentati come punti in un diagramma cartesiano.

Diagrammi a dispersione



- La percentuale di occupati in agricoltura e fertilità sono **positivamente associati**.
- Province con una alta percentuale di occupati in agricoltura hanno anche una alta fertilità. Viceversa, basse percentuali di occupati in agricoltura si osservano in province con bassi livelli di fertilità.
- Esiste una **associazione negativa** tra istruzione e fertilità.
- Province con un alto livello di istruzione hanno una fertilità più bassa delle province con un basso livello di istruzione.
- Simili considerazioni possono essere fatte per la relazione tra le variabili agricoltura e istruzione, in cui si osserva una **associazione negativa**.

- La relazione tra agricoltura e fertilità sembra **più debole** della relazione esistente tra agricoltura ed istruzione.
- Meno facile è valutare l'intensità delle relazioni intercorrenti tra istruzione e, rispettivamente, agricoltura e fertilità.
- La prima relazione (istruzione — agricoltura) sembra però in una qualche misura **più forte** della seconda (istruzione — fertilità).
- Per quantificare queste relazioni, abbiamo pertanto bisogno di un **indice** che sia in grado di identificare forza e direzioni delle associazioni tra variabili.

La covarianza

- Un indicatore che misura la forza della relazione tra due variabili è la **covarianza**.

- **Covarianza**. La covarianza delle coppie di dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ è

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

- Si noti che la covarianza è simmetrica, ovvero: $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$.
- La covarianza pertanto assume valori **positivi** se la maggior parte dei termini $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$ sono concordi, ovvero se hanno lo stesso segno.
- La covarianza assume invece valori **negativi** se la maggior parte dei termini $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$ sono discordi, ovvero se hanno segni diversi.
- Infine, la covarianza assume valori **prossimi a zero** se i termini $(x_i - \bar{x})$ e $(y_i - \bar{y})$ sono in ugual misura concordi e discordi.

Proprietà della covarianza

- **Proprietà.** La covarianza tra la variabile x e x stessa è pari alla varianza di x , ovvero

$$\text{cov}(x, x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{var}(x) \geq 0.$$

Poiché i termini $(x_i - \bar{x})$ e $(x_i - \bar{x})$ sono necessariamente sempre concordi, in questo caso la covarianza è grande e positiva.

- **Proprietà.** La covarianza tra la variabile x e $-x$ stessa è pari alla varianza di x cambiata di segno, ovvero

$$\text{cov}(x, -x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(-x_i + \bar{x}) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = -\text{var}(x) \leq 0.$$

Poiché i termini $(x_i - \bar{x})$ e $-(x_i - \bar{x})$ sono necessariamente sempre discordi, in questo caso la covarianza è grande e negativa.

La covarianza: formula per il calcolo

- La covarianza ammette una seconda definizione, spesso utilizzata in pratica perché **semplice da calcolare**.
- **Covarianza**. La covarianza delle coppie di dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ è

$$\text{cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y}.$$

- La dimostrazione si ottiene facilmente come segue

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) - \frac{\bar{x}}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}).$$

Il secondo termine è pari a zero, essendo la somma degli scarti dalla media. Pertanto

$$\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\bar{y}}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \bar{y}.$$

Esempio di calcolo della covarianza

■ **Dati** x_1, \dots, x_4 : 1, 3, 2, 5.

■ **Dati** y_1, \dots, y_4 : 4, 9, 5, 6.

■ Le medie aritmetiche (**momenti primi**) dei dati sono $\bar{x} = 2.75$ e $\bar{y} = 6$.

■ La media dei prodotti (**momento misto**) è pari a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1 \times 4 + 3 \times 9 + 2 \times 5 + 5 \times 6}{4} = 17.75.$$

■ Pertanto la covarianza è pari a

$$\text{cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - \bar{x} \bar{y} = 17.75 - 6 \times 2.75 = 1.25.$$

■ **Esercizio**. Si ottenga la covarianza utilizzando la prima definizione.

Covarianza: trasformazioni lineari

- **Proprietà.** Se consideriamo i dati trasformati v_1, \dots, v_n e w_1, \dots, w_n , tali che

$$v_i = a_x + b_x x_i, \quad w_i = a_y + b_y y_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove $a_x, b_x, a_y, b_y \in \mathbb{R}$ sono quattro numeri reali, allora

$$\text{cov}(v, w) = b_x b_y \text{cov}(x, y).$$

- La relazione precedente permette di calcolare agevolmente la covarianza tra le v_i e le w_i senza dover calcolare le v_i stesse.
- La dimostrazione segue dalle proprietà della media e delle sommatorie, infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})(w_i - \bar{w}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_x + b_x x_i - a_x - b_x \bar{x})(a_y + b_y y_i - a_y - b_y \bar{y}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_x b_y (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = b_x b_y \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \end{aligned}$$

La varianza della somma di due variabili

- La covarianza risulta utile anche quando vogliamo ottenere la varianza di una nuova variabile che sia la somma di altre due variabili.
- **Proprietà.** Siano x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n due insiemi di dati e siano w_1, \dots, w_n dei dati trasformati tali che

$$w_i = x_i + y_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Allora vale che

$$\text{var}(w) = \text{var}(x) + \text{var}(y) + 2\text{cov}(x, y).$$

- La dimostrazione anche in questo caso è immediata:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i - (\bar{x} + \bar{y}))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((x_i - \bar{x}) + (y_i - \bar{y}))^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}). \end{aligned}$$

La matrice delle varianze e covarianze

- Nel caso in esame, troviamo che

$$\begin{aligned}\text{cov}(\text{fertilit\`a}, \text{agricoltura}) &= 98.0, \\ \text{cov}(\text{fertilit\`a}, \text{istruzione}) &= -5.1, \\ \text{cov}(\text{agricoltura}, \text{istruzione}) &= -11.9.\end{aligned}$$

- Tipicamente, le varianze e le covarianze di tutte le coppie di variabili vengono organizzate in una matrice, chiamata **matrice delle varianze e covarianze**.

| | fertilit\`a | agricoltura | istruzione |
|-------------|-------------|-------------|------------|
| fertilit\`a | 152.7 | 98.0 | -5.1 |
| agricoltura | 98.0 | 504.8 | -11.9 |
| istruzione | -5.1 | -11.9 | 0.6 |

- In tale matrice, l'elemento in posizione (i, j) rappresenta la covarianza tra la variabile i -esima e la variabile j -esima.
- Nella diagonale ci sono le varianze, poich\`e $\text{cov}(x, x) = \text{var}(x)$. Inoltre, poich\`e $\text{cov}(x, y) = \text{cov}(y, x)$, la matrice \u00e8 **simmetrica**.

Grande quanto?

- L'esempio illustra uno dei problemi connessi con l'utilizzo della covarianza.
- L'**interpretazione del segno** non pone nessuno problema. Le covarianze riportate ci indicano una relazione tendenzialmente crescente tra fertilità ed agricoltura ed una relazione tendenzialmente decrescente tra queste due variabili e l'istruzione.
- Però, ad esempio, che $\text{cov}(\text{fertilità}, \text{agricoltura})$ risulti uguale a 98.0 indica un legame debole o forte tra le due variabili?
- Per rispondere alla domanda avremmo bisogno di conoscere un **estremo superiore**, possibilmente con una chiara interpretazione, per il valore assoluto della covarianza.

Minimo e massimo della covarianza

- Il minimo ed il massimo valore che la covarianza può assumere sono noti.
- In particolare, il valore assoluto della covarianza non è mai superiore al prodotto degli scarti quadratici medi. Questo aiuta moltissimo la sua interpretazione.
- **Proprietà**. Siano x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n due insiemi di dati, allora

$$-\text{sqm}(x)\text{sqm}(y) \leq \text{cov}(x, y) \leq \text{sqm}(x)\text{sqm}(y).$$

Di conseguenza si ottiene che

$$|\text{cov}(x, y)| \leq \text{sqm}(x)\text{sqm}(y).$$

- Nell'esempio precedente, questo significa che

$$\text{cov}(\text{fertilità}, \text{agricoltura}) = 98.0 \leq \sqrt{152.7}\sqrt{504.8} = 277.64,$$

ovvero circa la frazione $0.35 = 98.0/277.64$ del valore massimo.

- Per due variabili x ed y poniamo $\sigma_x = \text{sqm}(x)$ e $\sigma_y = \text{sqm}(y)$. Allora

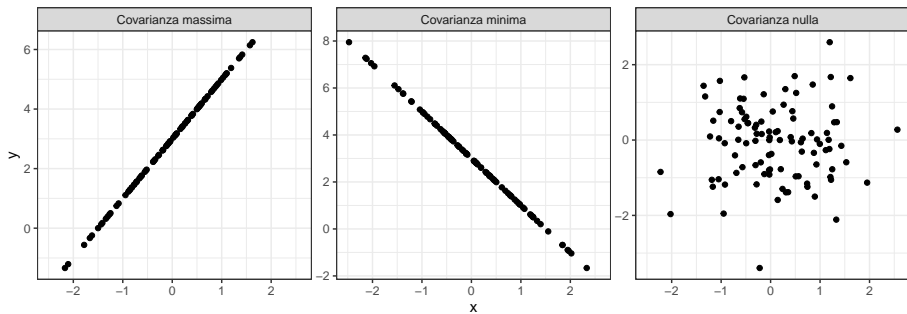
$$\begin{aligned}\text{var}\left(\frac{x}{\sigma_x} + \frac{y}{\sigma_y}\right) &= \text{var}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right) + \text{var}\left(\frac{y}{\sigma_y}\right) + 2\text{cov}\left(\frac{x}{\sigma_x}, \frac{y}{\sigma_y}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\text{var}(x) + \frac{1}{\sigma_y^2}\text{var}(y) + \frac{2}{\sigma_x\sigma_y}\text{cov}(x, y) \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{\sigma_x\sigma_y}\text{cov}(x, y)\right).\end{aligned}$$

- Trattandosi di una varianza, allora otteniamo che

$$2\left(1 + \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y}\right) \geq 0 \iff \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x\sigma_y} \geq -1 \iff \text{cov}(x, y) \geq -\sigma_x\sigma_y.$$

- Procedendo in maniera analoga, la seconda disuguaglianza si ottiene considerando $\text{var}(x/\sigma_x - y/\sigma_y)$, da cui segue (dopo un po' di conti...) che $\text{cov}(x, y) \leq \sigma_x\sigma_y$.

Minimo e massimo della covarianza



- La covarianza è massima, ovvero $\text{cov}(x, y) = \text{sqm}(x)\text{sqm}(y)$, quando i punti sono allineati lungo una **retta crescente**.
- La covarianza è minima, ovvero $\text{cov}(x, y) = -\text{sqm}(x)\text{sqm}(y)$, quando i punti sono allineati lungo una **retta decrescente**.
- La covarianza è nulla, ovvero $\text{cov}(x, y) = 0$, quando i punti sono dispersi.

Il coefficiente di correlazione

- Per affermare se la covarianza è piccola o grande dobbiamo quindi confrontarla con il prodotto degli scarti quadratici medi.
- Di conseguenza, solitamente la covarianza viene presentata direttamente nella sua forma **normalizzata**, chiamata correlazione.
- **Coefficiente di correlazione (lineare)**. La correlazione delle coppie di dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ è

$$\rho = \text{cor}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{sqm}(x)\text{sqm}(y)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y_i - \bar{y}}{\sigma_y} \right),$$

dove $\sigma_x = \text{sqm}(x)$ e $\sigma_y = \text{sqm}(y)$.

- Il coefficiente di correlazione è quindi pari alla **covarianza** dei **dati standardizzati**.

La matrice di correlazione

- Nel caso in esame, troviamo che

$$\begin{aligned}\text{cor}(\text{fertilit\`a}, \text{agricoltura}) &= 0.35, \\ \text{cor}(\text{fertilit\`a}, \text{istruzione}) &= -0.52, \\ \text{cor}(\text{agricoltura}, \text{istruzione}) &= -0.68.\end{aligned}$$

- Anche le correlazioni vengono tipicamente organizzate in una matrice, chiamata **matrice di correlazione**.

| | fertilit\`a | agricoltura | istruzione |
|-------------|-------------|-------------|------------|
| fertilit\`a | 1 | 0.35 | -0.52 |
| agricoltura | 0.35 | 1 | -0.68 |
| istruzione | -0.52 | -0.68 | 1 |

- In tale matrice, l'elemento in posizione (i, j) rappresenta la correlazione tra la variabile i -esima e la variabile j -esima.
- **Esercizio**. La diagonale \u00e8 pari 1, dato che $\text{cor}(x, x) = 1$. Si verifichi quest'ultima equazione.

Interpretazione della correlazione

- Proprietà. Siano x_1, \dots, x_n e y_1, \dots, y_n due insiemi di dati, allora

$$-1 \leq \text{cor}(x, y) \leq 1.$$

Questa proprietà segue dalle proprietà della covarianza.

- Se $\text{cor}(x, y) < 0$ allora i dati indicano una **associazione negativa** tra le due variabili (al crescere di una l'altra decresce). Se $\text{cor}(x, y) = -1$ allora i dati sono perfettamente allineati lungo una retta decrescente.
- Se $\text{cor}(x, y) = 0$ (in pratica se $\text{cor}(x, y) \approx 0$), allora non esiste una relazione lineare tra le due variabili.
- Se $\text{cor}(x, y) > 0$ allora i dati indicano una **associazione positiva** tra le due variabili (al crescere di una, cresce anche l'altra). Se $\text{cor}(x, y) = 1$ allora i dati sono perfettamente allineati lungo una retta crescente.

La correlazione misura relazioni lineari

- Per ragioni che diventeranno esplicite nell'Unità K, la covarianza e la correlazione misurano esclusivamente **relazioni lineari**. Questo ha importanti conseguenze.
- Se la relazione tra x ed y è monotona ma non lineare, allora $\text{cor}(x, y) < 1$.

- **Esempio**. Si considerino i dati x_1, \dots, x_5 pari a $-2, -1, \dots, 2$ e si consideri

$$y_i = e^{x_i}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Nonostante la relazione tra le variabili x ed y sia monotona, $\text{cor}(x, y) = 0.89 < 1$.

- Il fatto che $\text{cor}(x, y) = 0$ non permette di escludere la presenza di relazioni non-monotone nei dati.

- **Esempio**. Si considerino i dati x_1, \dots, x_5 pari a $-2, -1, \dots, 2$ e si consideri

$$y_i = x_i^2, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Nonostante ci sia una relazione ben precisa tra le variabili x ed y , $\text{cor}(x, y) = 0$.

La correlazione e trasformazioni non lineari

- Nonostante quanto visto nella slide precedente, la covarianza tra una variabile ed una sua trasformazione monotona crescente (decescente) è sempre positiva (negativa).

- Proprietà. Sia x_1, \dots, x_n un insieme di dati e si considerino i dati trasformati

$$y_i = g(x_i),$$

per $i = 1, \dots, n$, dove $g(x)$ è una funzione **monotona crescente**. Allora:

$$\text{cov}\{x, g(x)\} \geq 0 \quad \text{e quindi} \quad \text{cor}\{x, g(x)\} \geq 0.$$

- Se invece $g(x)$ una è funzione **monotona decrescente**, allora:

$$\text{cov}\{x, g(x)\} \leq 0 \quad \text{e quindi} \quad \text{cor}\{x, g(x)\} \leq 0.$$

Dimostrazione I

- Sia $g(x)$ una funzione monotona **crescente**. Il caso di funzione monotona **decescente** è lasciato come esercizio. Anzitutto, notiamo che

$$\begin{aligned}\text{cov}\{x, g(x)\} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\{g(x_i) - g(\bar{x}) + g(\bar{x}) - \bar{y}\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\{g(x_i) - g(\bar{x})\} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\{g(\bar{x}) - \bar{y}\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\{g(x_i) - g(\bar{x})\}.\end{aligned}$$

- Per definizione di funzione monotona crescente, abbiamo che

$$\text{se } x_i \geq \bar{x}, \quad \text{allora} \quad g(x_i) \geq g(\bar{x}),$$

mentre

$$\text{se } x_i \leq \bar{x}, \quad \text{allora} \quad g(x_i) \leq g(\bar{x}).$$

Dimostrazione II

- Ovviamente, di conseguenza:

$$\text{se } x_i - \bar{x} \geq 0, \quad \text{allora} \quad g(x_i) - g(\bar{x}) \geq 0,$$

mentre

$$\text{se } x_i - \bar{x} \leq 0, \quad \text{allora} \quad g(x_i) - g(\bar{x}) \leq 0.$$

- Questi risultati implicano in particolare che:

$$(x_i - \bar{x})\{g(x_i) - g(\bar{x})\} \geq 0,$$

dato che i segni della quantità $x_i - \bar{x}$ e della quantità $g(x_i) - g(\bar{x})$ sono **concordi**.

- Quindi, questi risultati implicano che

$$\text{cov}\{x, g(x)\} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})\{g(x_i) - g(\bar{x})\} \geq 0,$$

essendo la somma di termini non-negativi.

Ulteriori osservazioni, modelli lineari

- In questa unità abbiamo presentato covarianza e correlazione come degli indici in grado di misurare l'associazione tra due variabili numeriche.
- In particolare, ci siamo posti in maniera **simmetrica** rispetto alle variabili.
- Tuttavia tali indici si possono anche “scoprire” analizzando il problema da un punto di vista diverso.
- Infatti, covarianza e correlazione sono strettamente collegate ai **modelli di regressione lineare**, ovvero l'argomento della prossima unità.